

УДК 004.925.86+621.51.003.13

Борисенко В.Д.

Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Устенко С.А.

Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Устенко І.В.

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

ЗАСТОСУВАННЯ В-СПЛАЙНІВ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ПИТОМОЇ ІЗОБАРНОЇ ТЕПЛОЄМНОСТІ ПОВІТРЯ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ ТА ТИСКУ

Роботу присвячено розробленню методу аналітичного подання залежності питомої ізобарної теплоємності повітря із застосуванням В-сплайнів для варіювання температури та тиску, характерної для компресорів газотурбінних двигунів. Проведені розрахунки підтвердили працездатність методу та високу точність визначення питомої ізобарної теплоємності повітря від температури та тиску. Запропонований метод може застосовуватися під час проведення газодинамічних розрахунків компресорів, у яких повітря виступає робочою речовиною.

Ключові слова: *питома ізобарна теплоємність повітря, залежність від температури та тиску, В-сплайн.*

Постановка проблеми. Стиснене повітря широко застосовується у багатьох галузях техніки. Пристрої, в яких його отримують, називають компресорами. Ці газодинамічні машини знайшли широке застосування в авіаційних, суднових і локомотивних газотурбінних двигунах (далі – ГТД), у стаціонарних газотурбінних установках, де вони використовуються для приводу електрогенераторів на електростанціях і нагнітачів на магістральних газопроводах під час перекачування природного газу.

Завданням проектування проточних частин компресорів є вибір такої конфігурації, яка б забезпечувала задані проектні параметри створюваного компресора. Важливим при цьому є найбільш достовірне визначення термодинамічних, кінематичних, геометричних параметрів проточних частин компресорів, яке на першому етапі створення реалізується шляхом проведення газодинамічних розрахунків.

Доопрацювання компресорів виконується із застосуванням більш складних моделей течії повітря, включаючи просторовий в'язкий стискуваний рух, реалізований у пакетах обчислювальної газодинаміки. Проте у всіх цих розрахунках обов'язково застосовується важлива фізична характеристика повітря – питома ізобарна теплоємність (надалі теплоємність), яка супроводжує газодинамічні розрахунки компресорів від перших до останніх кроків.

Незважаючи на те, що компресори застосовуються в ГТД різного цільового призначення вже достатньо давно, удосконалення методів розрахунків під час їх проектування залишається актуальними і зараз.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання визначення термодинамічних параметрів повітря цікавить науковців ще з давніх часів. Підвищення точності міральної апаратури дозволило побудувати для повітря надійні таблиці густини, ентальпії, ентропії, теплоємності в доволі широкому діапазоні зміни температури та тиску.

Однією з фундаментальних публікацій, присвячених цьому питанню, слід вважати довідник Н.Б. Варгафтика [1], в якому наведені теплофізичні властивості багатьох газів, включаючи повітря. Проте в цьому довіднику не розглядається питання аналітичного подання залежностей цих властивостей від температури та тиску.

Робота колективу, керованого В.В. Сичовим [4], присвячена дослідженню та розгляду термодинамічних властивостей повітря. На підставі цих досліджень розроблено стандартні довідкові дані ГСССД 8–79 [2]. В обох цих публікаціях термодинамічні властивості повітря розглядаються в доволі широкому діапазоні температур і тиску. У джерелі [2] наведена залежність теплоємності повітря тільки від температури, яка має такий вигляд:

$$c_{p_0} = R \left(\sum_{j=0}^6 \alpha_j \Theta^j + \sum_{j=1}^6 \beta_j \Theta^{-j} \right), \quad (1)$$

де c_{p_0} – ізобарна теплоємність в ідеально-газовому стані, яка запозичена з роботи [9] та апроксимована поліномом; $R = 287,1$ Дж/(кг×К) – газова стала; α_j, β_j – коефіцієнти поліному, значення яких наведені в указаному вище джерелі; $\Theta = T/100$.

Треба зазначити, що в стандартних довідкових даних ГСССД 8–79 теплоємність повітря апроксимована в залежності тільки від температури. Відомі й інші апроксимовані залежності, отримані, наприклад, в NASA. Але всі ці залежності подають теплоємність повітря тільки у функції температури.

Постановка завдання. Метою роботи є розроблення методу аналітичного подання залежності теплоємності повітря від температури та тиску із застосуванням *B*-сплайнів і на базі запропонованого методу створення програмного коду з візуалізацією результатів розрахунків на екрані монітора комп'ютера.

Виклад основного матеріалу дослідження. Перш ніж розглянути питання, якому присвячена ця стаття, визначимося з областю зміни температури і тиску повітря, притаманній компресорам сучасних ГТД [3; 6; 7].

У джерелах з дослідження термодинамічних властивостей повітря розглядаються доволі широкі діапазони температур і тиску. Обмежимо область зміни цих параметрів. Так, у газодинамічних розрахунках компресорів температуру на вході до цих компонентів ГТД приймають дещо нижче 300 К (наприклад, 288 К [3]). За цих умов нижній рівень температури візьмемо з деяким запасом і приймемо рівним 250 К.

Нижній рівень тиску повітря обмежимо величиною 0,1 МПа, яка дуже близька до атмосферного тиску. Саме таке значення тиску є вихідною величиною у таблицях термодинамічних властивостей повітря, наведених у джерелах [1; 2; 4]. Верхній рівень тиску області, прийнятої до розгляду, візьмемо рівним 3 МПа, оскільки відомо, що у виконаних конструкціях компресорів ГТД максимальний тиск не перевищує цієї величини. Зважаючи на це, верхній рівень температури області дослідження обмежимо величиною 900 К.

У табл. 1 для обраних діапазонів варіювання температури та тиску наведені значення теплоємності повітря. Ці дані взяті з довідника [1], на нашу думку, більш надійного джерела.

Теплоємність повітря
в обраних діапазонах температури та тиску

Т К	c_p , кДж/(кг×К). при p , МПа				
	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0
250	1,006	1,016	1,028	1,055	1,081
300	1,007	1,013	1,021	1,037	1,053
350	1,009	1,014	1,019	1,030	1,042
400	1,014	1,017	1,021	1,029	1,037
450	1,021	1,024	1,027	1,033	1,038
500	1,030	1,032	1,034	1,039	1,043
600	1,051	1,053	1,055	1,057	1,060
700	1,075	1,076	1,077	1,079	1,081
800	1,099	1,100	1,100	1,102	1,103
900	1,121	1,122	1,122	1,123	1,125

Аналізуючи дані, представлені в табл. 1, можна зробити висновок, що теплоємність повітря залежить як від температури, так і тиску. Ця залежність має суттєвий нелінійний характер. Для всього обраного діапазону температур теплоємність зростає під час підвищення тиску повітря. Водночас немає підстав стверджувати, що теплоємність під час підвищення температури постійно зростає. Тільки при тиску 0,1 МПа теплоємність зростає за умов підвищенні температури. У всіх вищезгаданих випадках вона спочатку зменшується під час підвищення температури, а потім зростає. Треба відмітити, що чим вищий тиск, тим зона зниження теплоємності охоплює більший діапазон температур. Найбільш яскраво це проявляється за умов тиску повітря, рівному 3,0 МПа.

Наочно залежність теплоємності від температури та тиску можна побачити на рис. 1, на якому кола невеликого радіусу відповідають вихідним даним табл. 1. Для більшої яскравості вихідні точки з'єднані кривими лініями, які побудовані із застосуванням кубічних інтерполяційних сплайнів. Нижня крива відповідає тиску повітря 0,1 МПа, верхня – тиску 3,0 МПа. Побудовані криві повністю підтверджують висновки, зроблені під час аналізу даних, наведених у табл. 1.

Має певний інтерес візуалізація залежності теплоємності повітря від температури, поданої поліномом (1). Такі дані наведені на рис. 2. З розгляду цього рисунку випливає, що, по-перше, обидві криві майже повністю збігаються, і тільки в області малих температур має місце несуттєве розходження кривих, по-друге, крива, яка побудована із застосуванням поліному (1), відповідає тиску повітря, рівному 0,1 МПа. Зазначимо, що крива, на якій є кола невеликого радіусу, є повторенням нижньої лінії, показаної на рис. 1.

Пошук залежностей для аналітичного подання теплоємності повітря від температури та тиску почався з розгляду експоненціальних, поліноміальних та інших кривих. Але вони не призвели до бажаного результату. Більш ретельно аналізувалися поліноміальні залежності, які бралися різних степенів і різних комбінацій (шляхом множення, ділення, додавання, віднімання тощо) щодо температури та тиску. У деяких варіантах середньо квадратична похибка була прийнятною для випадку малих значень тиску, в інших – для більших його значень. Але в цілому результати подання теплоємності від температури та тиску із застосуванням поліноміальних залежностей не призводили до прийнятного результату. Тому було прийнято рішення застосувати для розв’язання поставленого завдання так звані В-сплайни, рівняння яких має такий вигляд [8]:

$$Q(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w), \quad (2)$$

де u, w – параметри, під якими в нашому випадку будуть розумітися температура T і тиск p повітря, відповідно; $B_{i,j}$ – вершини прямокутної контрольної сітки (температура та тиск, наведені в табл. 1); $N_{i,k}(u)$ і $M_{j,l}(w)$ – базисні функції в u і w напрямках відповідно; n і m – кількість вершин прямокутної контрольної сітки в u і w напрямках відповідно; k і l – порядок поверхні в цих же напрямках.

Базисні функції визначаються за таким алгоритмом:

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x_i \leq u < x_{i+1}; \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}$$

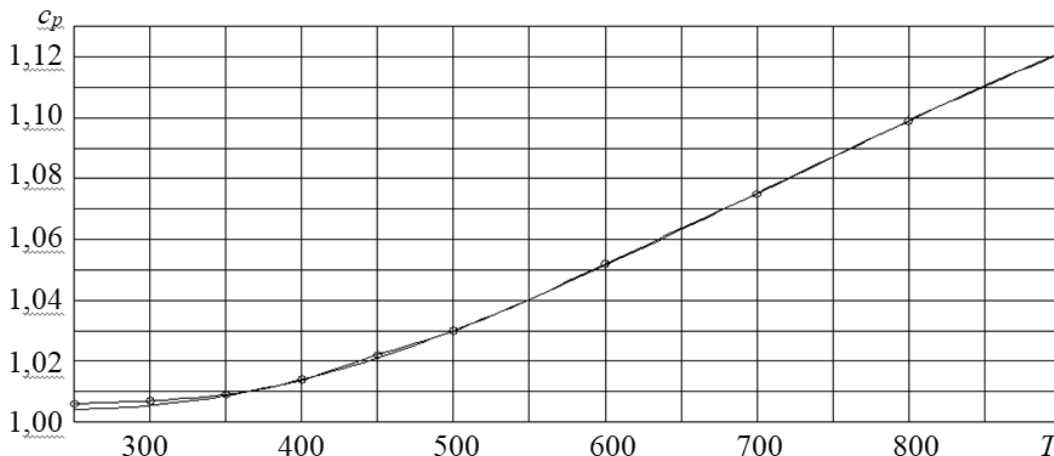


Рис. 2. Зіставлення теплоємності повітря від температури, побудованої за даними роботи [1] та за формулою (1)

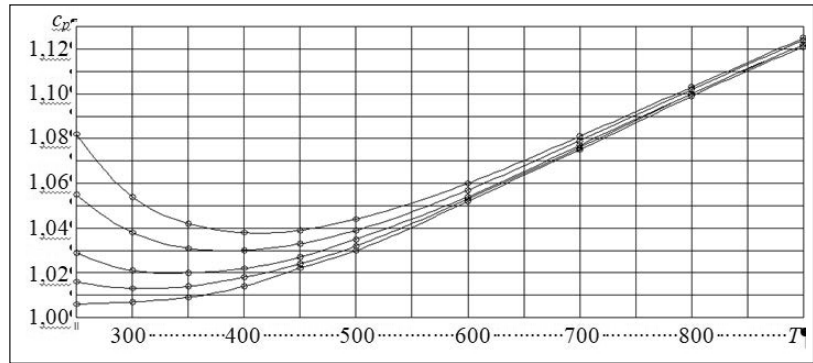


Рис. 1. Вихідні дані по теплоємності повітря, побудовані залежно від температури за умов різних значень тиску

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

$$M_{j,1} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } y_i \leq w < y_{i+1}; \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}$$

$$M_{i,k}(u) = \frac{(w - x_i) M_{j,l-1}(w)}{y_{j+l-1} - y_j} + \frac{(y_{j+l} - w) M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l} - y_{j+1}}$$

Під x_i та y_j розуміються компоненти так званих вузлових векторів, які відіграють важливу роль у побудові В-сплайнів. Вектор \bar{X} формується за таким алгоритмом, поданим у псевдокоді [8]:

```

x(1) = 0
for i = 2 to n + k
  if i > k and i < n + 2 then
    x(i) = x(i - 1) + 1
  else
    x(i) = x(i - 1)
  end if
next i
    
```

Вектор \bar{Y} формується аналогічним чином. Для його побудови застосовується кількість вершин m прямокутної контрольної сітки в напрямі параметра w та порядок l – порядок поверхні.

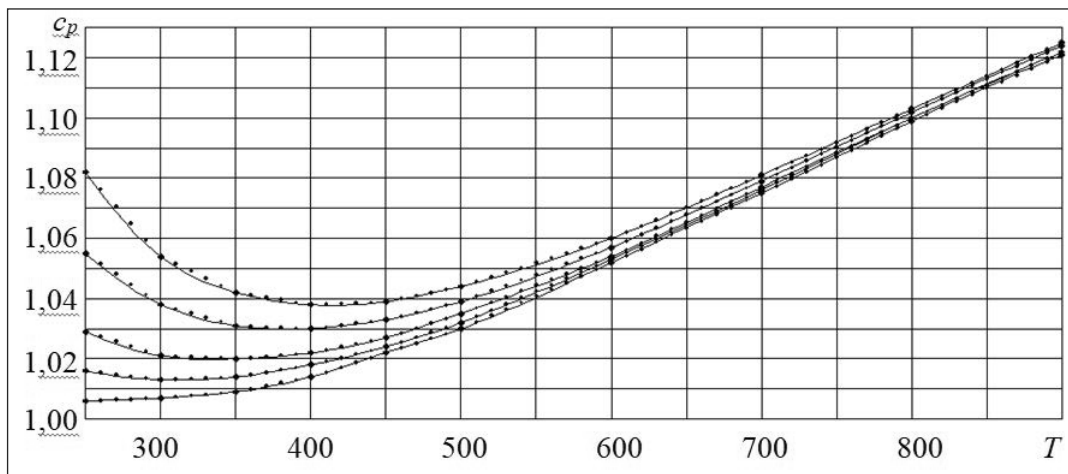


Рис. 3. Графіки залежності теплоємності для вихідних і проміжних значень температури повітря

Для визначення за виразом (2) координат B -сплайнової поверхні необхідно знати параметри u і w точки, в якій буде визначатися теплоємність повітря. Ці параметри тісно пов'язані з вузловими векторами \bar{X} і \bar{Y} . Оскільки вихідними даними для розрахунку шуканої термодинамічної характеристики повітря виступатимуть температура T і тиск p повітря, то треба для цих введених даних знайти значення параметрів u і w .

Для реалізації цих намірів застосовано високо-ефективну підпрограму *ZEROIN*, запропоновану в роботі [5], вихідними параметрами якої виступають інтервал пошуку, функція, значення якої треба звести до нуля, та точність розрахунків. За інтервал пошуку беруться мінімальне та максимальне значення вузлового вектора. Для визначеного підпрограмою *ZEROIN* проміжного значення параметра u чи w розраховуються деякі значення температури або тиску, які порівнюються із заданими значеннями. Визначення потрібного значення параметра u виконується за нульового значення параметра w . Така ситуація має місце під час визначення параметра w . Зазначимо, що процес визначення невідомих параметрів u і w є швидкозбіжним.

На підставі запропонованого методу аналітичного подання залежності теплоємності повітря від температури та тиску розроблено програмний код. Результати проведених за цим кодом розрахунків наведені у графічному вигляді на рис. 3. Розрахунки проводилися при $n = 10$ і $m = 5$, що відповідає кількості значень температури та тиску, наведених у табл. 1. Найкращі результати були отримані при значеннях k і l , які дорівнювали двом. Середньоквадратична похибка у цих значеннях порядків поверхні в обох напрямках становила приблизно $1,1 \times 10^{-18}$. Фактично серед-

ньоквадратична похибка проходження B -сплан поверхні через задані вихідні точки може вважатися рівною нулю.

Точки більшого розміру, зображені на рис. 3, відповідають вихідним даним із теплоємності, взятим із джерела [1], точки меншого розміру – розрахованим за запропонованим методом значенням цієї термодинамічної характеристики повітря для проміжних значень температури. Із розгляду цих даних випливає, що вихідні точки з високим ступенем точності належать кривим, показаним суцільними лініями.

Щодо проміжних точок можна зазначити, що за температури, яка перевищує 450 К, вони знаходяться на побудованих кривих. Деяке відхилення проміжних точок від цих кривих має місце за температури нижче 450 К. Але при цьому треба зазначити, що в зоні тиску від 0,1 до 0,5 МПа проміжні точки точно розташовані на відповідних кривих. І тільки зі збільшенням тиску повітря ступінь відхилення точок від кривих дещо зростає. Ці відхилення мають найбільші значення за умов тиску 3,0 МПа.

Відомо, що під час переміщення повітря вздовж тракту проточної частини компресора поступово зростають тиск і температура. На перших же ступенях компресора рівень тиску лежить у межах від 0,1 до 0,5 МПа (верхня межа тиску взята зі значним запасом). А саме в цій області параметрів повітря точки, які відповідають проміжним значенням температури, розташовуються на кривих, показаних на рис. 3.

У табл. 2 для порівняння наведені значення питомої теплоємності повітря в зоні температур 250 – 300 К при тиску 3,0 МПа, які взяті із джерела [1], а також значення цієї характеристики повітря, розраховані за запропонованим методом її аналітичного подання.

Таблиця 2

Зіставлення вихідних і розрахованих значень теплоємності повітря

Т К	c_p за даними [1]	c_p розраховане	Похибка у відсотках
250	1,081	1,0810	0,0
260	1,073	1,0764	0,317
270	1,067	1,0708	0,357
280	1,061	1,0652	0,396
290	1,057	1,0596	0,246
300	1,053	1,0530	0,0

Як впливає з розгляду даних, наведених у цій таблиці, найбільша похибка подання теплоємності повітря не перевищує 0,4 відсотка. Відхилення проміжних точок від суцільних кривих відбувається на тих ділянках цих кривих, які мають спадний характер. Зазначимо, що найбільші відхилення належать зоні термодинамічних параметрів, яка не є актуальною для газодинамічних розрахунків компресорів ГТД.

Наведені вище результати розрахунків теплоємності підтвердили працездатність запропонованого методу її аналітичного подання із застосуванням В-сплайнів. Автори розуміють, що більш компактним поданням шуканої залежності від температури та тиску повітря була б побудова деякої поліноміальної залежності. Але, на жаль, їм таку залежність побудувати не вдалося.

Щодо В-сплайнів можна зазначити, що їм притаманна легкість алгоритмізації, програмний код має високі швидкодню та надійність; програмні зупини відсутні.

Висновки. Запропоновано новий метод аналітичного подання залежності теплоємності повітря від температури та тиску для області зміни цих параметрів, характерної для газодинамічних розрахунків компресорів ГТД. Застосування В-сплайнів дозволяє визначити теплоємність повітря з високою точністю. Метод реалізовано у вигляді програмного коду та адаптовано до газодинамічних розрахунків компресорів, робочою речовиною яких виступає повітря.

Список літератури:

1. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Москва: Наука, 1972. 720 с.
2. ГСССД 8–79. Воздух жидкий и газообразный. Плотность, энтальпия, энтропия и изобарная теплоемкость при температурах 70–1500 К и давлениях 0,1–100 МПа. Москва: Издательство стандартов, 1991. 15 с.
3. Романовський Г.Ф., Ващиленко М.В., Седько М.П. Основи проектування компресорів судових ГТД: Навчальний посібник. Миколаїв: НУК, 2008. 292 с.
4. Термодинамические свойства воздуха / Сычев В.В., Вассерман А.А., Козлов А.Д. и др. Москва: Издательство стандартов, 1978. 275 с.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1980. 280 с.
6. Холщевников К.В. Теория и расчет авиационных лопаточных машин. Москва: Машиностроение, 1970. 609 с.
7. Cumpsty N.A. Compressor aerodynamics. Krieger Publishing Company, 2004. 552 p.
8. Rogers D.F. An introduction to NURBS: with historical perspective. Morgan Kaufmann Press, 2001. 324 p.
9. Tables of thermal properties of gases. Washington., Gov. print, off., 1955, XI. (U. S. Dep. of commerce. NBS. Girc. 564). 488 p.

ПРИМЕНЕНИЕ В-СПЛАЙНОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ УДЕЛЬНОЙ ИЗОБАРНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ВОЗДУХА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

Работа посвящена разработке метода аналитического описания зависимости удельной изобарной теплоемкости воздуха с применением В-сплайн-ов для области варьирования температуры и давления, характерной для компрессоров газотурбинных двигателей. Проведенные расчеты подтвердили работоспособность метода и высокую точность определения удельной изобарной теплоемкости воздуха от температуры и давления. Предложенный метод может применяться при проведении газодинамических расчетов компрессоров, в которых воздух используется в качестве рабочего вещества.

Ключевые слова: удельная изобарная теплоемкость воздуха, зависимость от температуры и давления, В-сплайн.

APPLICATION OF B-SPLINES FOR DETERMINATION OF DEPENDENCE OF ISOBARIC HEAT CAPACITY OF AIR ON TEMPERATURE AND PRESSURE

The work is devoted to the development of the method of analytical representation of the specific isobaric heat capacity of air with the use of B-splines for the range of temperature and pressure variations typical for compressors of gas turbine engines. The performed calculations confirmed the efficiency of the method and the high accuracy of determining the specific isobaric heat capacity of air on temperature and pressure. The proposed method can be used for gas-dynamic calculations of compressors in which air is used as a working substance.

Key words: specific isobaric heat capacity of air, dependence on temperature and pressure, B-spline.